Доказать, что при $n \geq 5$ верно неравенство

$2^n \geq n^2$

Решение:

Воспользуемся методом математической индукции.

1) Индукционная база. Рассмотрим неравенство при $n = 5$. Данный пример интересен тем, что доказываемое неравенство верно не для всех натуральных n, а только начиная с некоторого числа. Итак, при $n = 5$ имеем

   $$2^5 \geq 5^2 \Leftrightarrow 32 \geq 25$$

   Истина.
2) Индукционный переход. Докажем, что верно неравенство $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ в предположении, что верно равенство $2^n \geq n^2$, и, разумеется, при $n \geq 5$.

   $$2^{n+1} \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2^n \cdot 2 \geq n^2 + 2n + 1$$

Обратим внимание, что по индукционному предположению

$$2^n \geq n^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$$

Здесь хочется вспомнить сказку А.С.Пушкина о попе и работнике его Балде. В ней есть эпизод, когда бесёнок предлагает Балде посоревноваться с ним в беге. Балда, в свою очередь, предлагает бесёнку бегать наперегонки не с ним самим Балдою, а с его меньши’м братом — зайчонком:

Ты, бесёнок, ещё молоденек,
Со мною тягаться слабенек;
Это было б лишь времени трата.
Обгони-ка сперва моего брата.

В данном примере в роли Балды выражение $2 \cdot 2^n$, в роли меньшо’го брата $2n^2$, а в роли бесёнка $\left(n^2 + 2n + 1\right)$. Балда отказывается соревноваться с бесёнком сам. Соревнуются меньшо’й брат и бесёнок. Доказываем, что $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$ и на основании того, что априори считается, что Балда бегает быстрее своего меньшо’го брата, то окажется верным двойное неравенство

$$2\cdot 2^n \geq 2n^2 \geq n^2+2n+1$$

Итак, нужно всего-навсего доказать неравенство $2n^2 \geq n^2+2n+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2-2n-1 \geq 0$$

$$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-1)=4+4=8$$

$$n_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

Решением этого квадратного неравенства будет объединение промежутков

$$n\in\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)\bigcup\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$$

Вспомним, что $n\geq 5$, и поскольку $5>1+\sqrt{2}$, то при $n\geq 5$ квадратное неравенство выполнено. Неравенство доказано окончательно.